韶关学院 2023 年大学生数学竞赛（非数学类）试卷

________________专业______级____班　学号____________

姓名___________　　　　竞赛编号____________

（本试卷满分为 150 分，竞赛时间：150 分钟）

题号	一	二	三	总分	签名
得分					

一	得 分	阅卷教师

一、填空题（本题满分 50 分，每小题 5 分）

1、积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(\arctan x)^2}=$ ____________________.

2、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-e^{2x})\tan x^3}{\ln(1-x^2)(1-\cos 3x)}=$ ____________________.

3、函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=$ ____________________.

4、极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}=$ ____________________.

5.若直线 $\frac{x-3}{2k}=-y-1=\frac{z-3}{5}$ 与 $\frac{x-1}{3}=y+5=\frac{z+2}{k-2}$ 垂直，则 $k=$ ____.

6、设函数 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{-4x^{-2}}, & x>0\\ \sin^2 x-a, & x\le 0\end{cases}$ 连续，则 $a=$ ____________.

7、已知 f 可微，$z=f(\ln x+2\sqrt{y})$，则 $dz\big|_{\substack{x=1\\y=1}}=$ ______________.

8、已知 $\boldsymbol{f(\cos x)=1-\cos 2x}$，则 $\boldsymbol{f(x)=}$ ____________________.

9、设 $f(x)$ 连续可导，$f(0)=0$，$f'(0)=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)}{1-\cos x}=$ ______.

10、曲面 $z=x^2+y^2+z^2-8$ 在点 $(1,1,3)$ 处的切平面方程为：

____.

二	得 分	阅卷教师

二、（本题满分 50 分，每小题 5 分）

11、求函数 $f(x)=x^3+6x^2+9x-2$ 的单调区间与极值.

12、设 $x^2+y^2+z^2-4z=e^2$，证明 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}=x\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

13、设 $xy=\int_0^{x+y}\sin t\,\mathrm{d}t$，求 $\frac{dy}{dx}$.

14、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续 $(a<b)$，且 $f(a)=\frac{1}{2}b$，$f(b)=\frac{1}{2}a$，证明存在点 $\xi\in(a,b)$ 使得：$2f(\xi)=\xi$.

15、求曲线 $y=\ln x$ 介于 $1\le x\le e$ 的一段绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

16、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$的收敛域.

17、计算$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中D：$x^2+y^2\le a^2$.

18、设 $z=f(u)$，且 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)\,dt$ 是关于 x,y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$, $p(t)$有连续导数，且$\varphi'(u)\ne 1$，证明：$p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}=0$

19、设 $z=(x^2+\arctan y)^{y\sin x}$ $(y>0)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

20、计算：$\displaystyle\int \frac{\pi-\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$.

<table>
<tr><td rowspan="2">三</td><td>得 分</td><td>阅卷教师</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

三、（本题满分 50 分，每小题各 10 分）

21、求极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

22、已知一曲线经过原点，且它在点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $\sec x + y\tan x$，求这曲线的方程.

23、设函数$z\left(x,y\right)$满足$\frac{\partial z}{\partial x} = \quad \sin y + \frac{1}{1 \quad xy}$，$z(1,y) = \sin y$，试求函数

$z(x,y)$

24、若曲线$y = y(x)$由$\begin{cases} x = t + \cos t \\ e^{y} = 1 + ty - \sin t \end{cases}$确定,求此曲线在点$(1,0)$处的切线方程.

25、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内可导，证明：

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}$

(2) 设 $c\in(a,b)$ 且 $f(a)=f(b)>f(c)$，则存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$f'(\xi)f'(\eta)<0$.