韶关学院第十二届大学生数学竞赛（数学类）试卷

年级 _____ 专业 _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 竞赛编号 _____

(本试卷满分为 150 分, 竞赛时间：150 分钟)

题号	一	二	三	四	五	六	总分	签名
得分								

一	得分	阅卷教师

一、单选题 (共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分)

1. 直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{2}$ 与平面 $2x+4y+z+6=0$ 之间是 (　　)

(A) 平行　　(B) 垂直

(C) 相交但不垂直　　(D) 直线在平面上

2. 与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$ 合同的矩阵是 (　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$

3. 对任意数 a,b,c, 线性无关的向量组是 (　　)

(A) $(a,1,2),(2,b,3),(0,0,0)$

(B) $(b,1,1),(1,a,3),(2,3,c),(a,0,c)$

(C) $(1,a,1,1),(1,b,1,0),(1,c,0,0)$

(D) $(1,1,1,a),(2,2,2,b),(0,0,0,c)$

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有 ( )

(A) $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$ (B) $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$

(C) $a_n > a - \dfrac{1}{n}$ (D) $a_n < a + \dfrac{1}{n}$

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -ax, & x \leqslant -1, \\ x, & -1 < x < 0, \\ x - b, & x \geqslant 0. \end{cases}$ 若 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续, 则 ( )

(A) $a=3, b=1$ (B) $a=3, b=2$

(C) $a=-3, b=1$ (D) $a=-3, b=2$

6. 若 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$ ，则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为 ( )

(A) 0 (B) 6 (C) 36 (D) ∞

二	得 分	阅卷教师

二、填空题 (共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分)

1. 已知空间中三个定点 $A=(1,1,1), B=(2,1,2), C=(1,-1,0)$, 则三角形 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} =$ ______ .

2. 与平面 $3x+y-z+4=0$ 平行, 且在 z 轴上截距为 -2 的平面方程是 ____________ .

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, 且秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$, 则 $k =$ ______ .

4. 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根, 则行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} =$ _____ .

5. 设 $f'(\ln x) = 1 + x$ ，则 $f(x) =$ ______________ .

6. 已知函数 $f(x)$ 在实数域 R 上可导, $f'(0) = 3$, 且

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{\cos x}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

计算复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在点 $x = 0$ 处的导数 $\left.\dfrac{df[\varphi(x)]}{dx}\right|_{x=0} =$ ______ .

7. 曲线 $L: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 绕直线 $y = x$ 旋转所得的旋转体表面积 $A =$ ________________ .

8. 无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{ax}}{x} \cos x dx =$ ________________ .

三	得 分	阅卷教师

三、计算题 (共 2 小题，第一小题 10 分，第二小题 12 分，共 22 分)

1. 求过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+2}{-1}$, 且与点 $P(1,0,3)$ 之间距离为 2 的平面方程.

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}^k$, 其中 k 为正整数, 且 $k\geqslant 2$.

<table>
<tr><td rowspan="2">四</td><td>得 分</td><td>阅卷教师</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

四、证明题 (共 2 小题，第一小题 10 分，第二小题 15 分，共 25 分)

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $s\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{\beta}$ 为 s 维列向量.

(1) 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解且 $r(\boldsymbol{A})=r$. 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解向量中线性无关的最多有多少个? 找出一组个数最多的线性无关的解向量.

(2) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 对所有的 s 维非零向量 $\boldsymbol{\beta}$ 都有解. 求 $r(\boldsymbol{A})$.

<table>
<tr><td rowspan="2">五</td><td>得 分</td><td>阅卷教师</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

五、(共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cos\left(n+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sqrt[3]{n^2}+2023n-2022}$.

2. 求常数 a, b 使得: $[\ln(1+ax)]^2-\sin^2(bx)+x^3$ 在 $x\to 0$ 时为 x 的 4 阶无穷小.

六	得 分	阅卷教师

六、(共 2 小题，第一小题 12 分，第二小题 15 分，共 27 分)

1. 设 $f(x) \in C[a,b], \forall g(x) \in C[a,b]$, 且 $\int_a^b g(x)dx = 0$, 则 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

证明: (1) $\exists c \in [a,b]$, 使得 $\int_a^b f^2(x)dx = f(c)\int_a^b f(x)dx$;

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常值函数.

2. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是非负连续凹函数, 且 $f(0)=1$, 证明:

$$\int_0^1 xf(x)dx \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2.$$